



TITLE:

# Multi-channel系における相補性と 双対性 (量子科学における双対性と スケール)

AUTHOR(S):

原田, 僚; 小嶋, 泉; 岡村, 和弥; 西郷, 甲矢人; 谷村, 省  
吾

---

CITATION:

原田, 僚 ...[et al]. Multi-channel系における相補性と双対性 (量子科学に  
おける双対性とスケール). 数理解析研究所講究録 2010, 1705: 161-173

ISSUE DATE:

2010-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170112>

RIGHT:

# Multi-channel 系における相補性と双対性<sup>1</sup>

原田 僚<sup>A</sup>, 小嶋 泉<sup>A</sup>, 岡村 和弥<sup>B, 2</sup>, 西郷 甲矢人<sup>A</sup>, 谷村 省吾<sup>C</sup>

京都大学数理解析研究所<sup>A</sup>,  
京都大学大学院理学研究科数学教室<sup>B</sup>,  
京都大学大学院情報学研究科<sup>C</sup>

## 概要

Multi-channel 系の特徴付けを行う. 2-channel 系の単なる一般化にとどまらない描像が多く提示される. そして歴史的に 2-channel 系を考察する元となった相補性原理を双対性のもとに再提唱する.

## 1 導入

Niels Bohr が提唱して以来, 量子論についての考察にしばしば登場する相補性原理とは何であろうか? 時折位置と運動量は非可換だから相補的だと言われることがあるが, 作用素同士が非可換というだけで相補的, などとは誰もまともに考えたことはないはずでは? 例えばスピンの  $x$  成分  $\sigma_x$  と  $y$  成分  $\sigma_y$  は非可換だが相補的であるといえるだろうか? そして不確定性原理との概念混同もひどく, 不確定性原理との区別がつかない説明をされることがある。Bohr は相補性原理について多くの論文で議論している ([1] にまとめられている) が本稿で論ずるような明確な形にその本質がまとめられているわけでもなく, 歴史的には哲学的言明として受け止められた。そのため, ここ 20 年の精密技術の発展により実験的アプローチが可能となるまで, 量子力学成立当初を除いて, 定量的議論は非常に稀であった (代表的な例外に [3] がある)。1970 年代前半までの歴史的な事情は哲学的研究を中心に [2] にまとめられている。ごく最近では Storey, Tan, Collett, Walls [4] と Scully, Walther および Englert [5] との間で相補性に関する誌上討論 [6] があった。実験により決着はついているが, 論争の原因は, 相補性原理の概念的な位置付けが不十分なことに由来した誤解, すれ違いによるものと我々は了解している。

量子と古典, ミクロとマクロ, 物理量と測定値, 等々に共通する特徴的な相互関係の本質は, 「双対性」という数学的概念を用いると明確な理解が可能になる。まずそれを説明することが本稿での最初の目標である。次に “multi-channel 系” への拡張を意図した文脈で 2-channel 系を扱う。“Multi-channel 系” を持ち出す理由は, もし相補性原理が 2-channel 系のみに関わる概念でしかないなら, そもそも「相補性原理」と名づけるほどの重要な意味はなく, 量子力学の基礎にまで及ぶような概念としての出番はなかったはずであり, より一般的な文脈へのその関与を知ることが本質的に重要だ, ということである。そのための足掛かりとなるような考察対象の存在を, ここで提示したい。ダブルスリット実験, Mach-Zehnder 干渉計等, 2-channel 系の典型例において, 一般化された文脈で考察すべき内容を可能な限り洗い出す。これら 2-channel 系では実験設定の変更により識別実験・干渉実験の切替えが可能で, 量子の対象はそれに応じて粒子や波動という古典的形を取って可視化される。この点を掘り下げることが, 後の相補性の定式化とのつながりを見易くする。

<sup>1</sup>RIMS 共同研究・基研研究会「量子科学における双対性とスケール」(京都大学基礎物理学研究所)(2009 年 11 月 4 日～6 日)

<sup>2</sup>講演者: 連絡先 okamura@math.kyoto-u.ac.jp

以上の準備の下に multi-channel 系の特徴付けを与えるため、必要な新しい視点として Lie 代数とそのルート系の理論を導入する。Lie 代数論では、Cartan 部分代数やその同時固有値に対応するルートの概念に基づいて (半単純) Lie 代数の構造が詳細に解析されるが、この Cartan 部分代数とルート系を用いると 2-channel 系における識別と干渉は物理量と測定値の双対的關係として明快に定式化される。同時にそれによって、multi-channel 系の定式化が可能になり、そこで識別と干渉の間の双対性、Cartan 部分代数とルート空間の間の役割分担＝「棲み分け」現象がルート空間分解によって明快に記述される。

最後に相補性の定式化を双対性に基づいて行う。相補性原理が 2-channel 系の文脈でしか考察されなかった状況と異なって、ここでは数学的な定式化が可能となる。

## 2 双対性

「双対性」とは、ある対象の記述・認識に本質的な役割を果たす対概念を見つけ出し、その対 (ペア) 相互の間に見出された相互規定関係を意味する。同時に、その相互規定関係に着眼しそれを解明することを通じて対象認識を深化させ、それによって対象への働きかけ・制御の可能性を開き、それを拡大することを目指す、という意味で方法論をも与える。

状態と物理量のなす双対性への理解が物理学における双対性と相補性の理解に欠かせない。物理量とは対象の側面を明瞭に定量的に言い表わす概念装置である。物理量全体は代数構造を持ち、状態はその上の線型汎関数として定義される。また、確率分布という文脈からは状態は各物理量の射影を区間  $[0, 1]$  に帰着させるものである。このように数学的記述は物理量の双対として定義される非常に明快なものであるが、物理的解釈は物理量を介して初めて可能になる。ただし古典対応物である測度論的確率論の確率測度と全く同様というわけにはいかない。というのは、2つ以上の物理量は一般には結合確率分布を持たないため、相関関数・weak value[7] の文脈を除いては、一挙に扱うことはできないからである。しかし、結合確率分布を持たなくともいくつかの物理量の描像を実験設定などの推論の過程で適宜利用することができ、そのような物理量の描像の利用自体が状態の理解なのである<sup>3</sup>。

双対性は物理学、特に量子論においてはまた異なった側面を提示する。量子論はミクロを対象とする理論であるが、ミクロ量子系を実験により測定 (認識) する我々はマクロ側の存在であり、量子論の出発点からマクロの存在を認め理論を展開し眺めるときに双対性が現れる。この双対性をミクロ・マクロ双対性 [8] と呼ぶ。マクロ古典系を「ミクロ量子系を観測・記述・制御するもの」と捉え、ミクロ量子系を「マクロ古典系を生み出し支える動的存在」として扱う枠組みである。本来、ミクロ・マクロ双対性は相補性の議論にも深く関わるにも関わらず、それらの本質的結びつきはこれまで考慮されて来なかった。

数学においても双対性は積極的に活用されている。なかでも圏論 [9] は双対性を最も活用している分野であって、opposite category の構成が双対な言明を扱う手順であり、随伴の概念が双対性の一般化に相当する。以下の例で双対性を実感できると思う。

例 1. (補集合)  $X$  を集合とし、 $A$  を  $X$  の部分集合とする。このとき  $A^c$  で  $A$  の補集合を表すとすると、 $A = (A^c)^c$  が成り立つ。

例 2. (組み合わせの数)  ${}_nC_p = {}_nC_{n-p}$  :  $n$  枚のカードの中から  $p$  枚選ぶときの組み合わせの数と  $n - p$  枚選ぶときの組み合わせの数は等しい。

<sup>3</sup>状態概念の理解では通常このように意識されていない。これは背後にある双対性が我々の思考法に自然に根付いているからに他ならない。

例 3. (平面の方程式)  $\mathbb{R}^3$  での方程式  $ax + by + cz = 0$  を満たす点  $(x, y, z)$  の集合は平面をなす。平面の方程式  $ax + by + cz = 0$  は法線ベクトル  $(a, b, c)$  を指定し、また平面  $ax + by + cz = 0$  はベクトル  $(a, b, c)$  に垂直なベクトル  $(x, y, z)$  の全体として指定される。

例 4. (双対空間)  $V$  を体  $\mathbb{K}$  (通常は  $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{R}$ ) 上の有限次元線型空間とし、 $V$  上の線型汎関数全体を  $V^*$  とする。 $V^*$  には自然に和とスカラー倍の構造が入り、こちらにも有限次元線型空間となる。このとき  $\hat{v}(f) := f(v)$  ( $v \in V, f \in V^*$ ) により  $\hat{\cdot}: V \rightarrow (V^*)^* =: V^{**}$  ( $v \mapsto \hat{v}$ ) を定めると、これは  $V$  と  $V^{**}$  ( $V$  の第二双対空間と呼ぶ) の間の同型写像である。

例 5. (Banach 空間と有界線型汎関数) 有限次元線型空間と同様に線型位相空間  $L$  においても双対空間  $L^*$  や第二双対空間  $L^{**}$  への元の線型位相空間  $L$  の埋め込み写像  $\hat{\cdot}: L \rightarrow L^{**}$  ( $l \mapsto \hat{l}$ ) が定義される。埋め込み写像  $\hat{\cdot}$  により  $L \subseteq L^{**}$  と見做せる。 $L = L^{**}$  のとき線型位相空間  $L$  は回帰的であるという。Banach 空間においては Banach 空間が回帰的である必要十分条件が得られていて、Banach 空間  $X$  が回帰的であることと、 $\{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$  が弱位相でコンパクトであることは必要十分である。すなわち Banach 空間での第二双対空間に関する双対性に双対空間が位相を通して関わっている。

## 3 2-channel 系

### 3.1 具体例：ダブルスリット実験

ダブルスリット実験は相補性原理をはじめとした量子論の基礎概念にまつわる解釈の検証に用いられ、Bohr と Einstein との大論争を引き起こした思考実験、古戦場である。[1] で議論されたことに始まり、[10] で実験がなされ、思考実験ではなく現実の話題となった今ではれっきとした定量的な議論の対象である。それ故、現代的な量子論の理解に基づいてダブルスリット実験を整理することは意義深く、相補性の理解へつながると考えている。

ダブルスリット実験の実験設定は (測定精度等の技術面を除いて) 構造的には非常に単純である。2 本の細い線状の穴 (スリット) が空いたスリット壁とスクリーンとなる板を平行に設置し、スリット壁をはさんでスクリーンとは反対側から粒子を放出する。これが最も基本となる設定である (図 1)。ダブルスリット実験はこの設定に加えてスクリーン側のそれぞれのスリットのすぐ近くに粒子を検出できる装置を設置し、検出装置が粒子の一方のスリットの通過を検出し、スクリーンに到達した粒子のみを扱う設定も可能である。前者の設定を設定 W、後者を設定 P と呼ぶことにする。設定 W の実験設定では、スクリーンに到達した粒子の位置を表す輝点はスリットに平行な “干渉” 模様をつくる。あたかも波のように、である。一方の設定 P では、2 つのスリットを通過したことが了解できる輝点の集まりが現れる。したがって、われわれの経験知識であるマクロ古典系の概念の「粒子」と「波動」という言葉を借りてそれぞれの設定をデータから解釈すれば、設定 W では粒子は 2 つのスリットを通過してスクリーンに波動現象に特徴的な干渉縞と酷似した輝点の集まりを残し (そのような位置の分布を示し)、設定 P ではほぼ粒子運動の結果と思わせる輝点の集まりを残す。

実験の設定にあわせて解釈を変更することに疑問を感じる方がいるかもしれないが、測定器を介してしか観測し触れられないミクロな対象を的確に表現し得る言語を本来我々は持っていない、ということが見落されるべきではないだろう。我々がミクロ対象に対してあるイメージをもち、そのイメージを操作して推論し、予測が可能になるような記述の枠組を実現するには不可欠な仮説 (仮定) であり、実験的状況との相

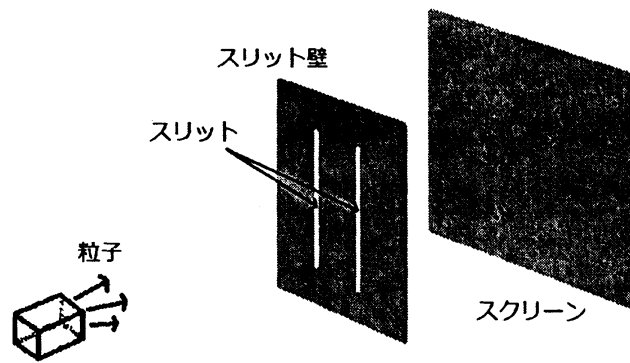


図 1: ダブルスリット実験 (スリットの通過を測定しない場合)

関において十分妥当な有効性を持つ解釈として援用する，ということに他ならない<sup>4</sup>。これらのことには Bohr も言及している。我々は自然に対して能動的に働きかける一方，深層レベルでは外界・自然から深く規定づけられた存在である。そのことを考慮すれば，我々人間の自然への接触のあり方に不可避免的に課される制限それ自体が「障害」(数学用語としての obstruction) として機能し，そのため，物理理論は自然現象を近似的にのみ記述する枠組みだということを正当に考慮する必要がある。議論を戻すと，このような解釈の下では，設定 W は波動的応答を引き出し，設定 P は粒子的応答を引き出す実験設定ということになる。2つの実験設定の大きな差はスリットを通過したか否かを測定により監視することであり，むしろスリット識別とスクリーンでの応答の相関を調べる実験ともみなせ，これは実験として成立する。特に，スリットの通過についてのデータの利用に応じてスクリーンの輝点は異なるパターンを示す。実験および解析データとしては，通過したスリットを常には識別できない測定装置を利用する。このときデータ解析により2種類，通過したスリットを識別できたデータとできなかったデータに分割できる。識別できたデータは設定 P と同じ応答をし，他方できなかったデータは設定 W と同じ応答をして，データを利用して分けたそれぞれで波動と粒子の振る舞いの結果と思われる輝点の集まりが現れるということである。通過スリットの識別に関する情報を利用しなかった元のデータは粒子と波動のどちらとも解釈しようがなかったにも関わらず。

以上から粒子や波動といった古典的実体との対応付けは実験の設定に大きく依存すると結論付けることができる。特に，測定および測定結果(測定値)の扱いもその要素である。そして Bohr の提唱した相補性を現代的に改良したものと合致する：

**相補性原理 1.** (現代改良版) 識別実験と干渉実験は同時に行うことはできない。粒子と波動の両方の性質を担うような単一の実体を想定する必要はないし，間違っていない。それでいて，量子論的な系の性質を知る上では両方とも不可欠である。

先の実験設定は識別実験と干渉実験を同時に行ったことにはならず，むしろ同時に行うような実験設定には元からなっていなかった(なり得なかった)ので，今までの議論は Bohr の提唱した相補性の検証材料として最適であったといえる。

<sup>4</sup>これらのことを正確に言明しない本が量子論に対する誤解を広めているように思われる。しかも解釈を決定付けるのは1つや2つの実験ではなく多くの実験による総合的な判断に基づいていることを忘れてはならない。

### 3.2 定量的検証

定量的な検証をする題材として Mach-Zehnder 干渉計を用いる。Mach-Zehnder 干渉計は multi-channel 系の  $n = 2$  におけるモデルとなる故、その特徴づけは本質的な意味合いを持つ。Mach-Zehnder 干渉計は次のような実験設定である。光源から出た光線をビームスプリッタで2経路に分け、ミラーを利用して2経路を一点で交差させる。そしてその交点にビームスプリッタを置き、交点よりミラー側の一方の経路上に位相シフタを設置する。最後に、2つ目のビームスプリッタによって決められた光線の進行方向(2方向)に光の検出器を置く。位相シフタは挿入の度合いで光の位相を変更できるものとする。この設定(図2)を設定Iと呼ぶことにする。また、設定Iから2つめのビームスプリッタを取り除いた設定にすることもでき、この設定(図3)を設定Dと呼ぶ。

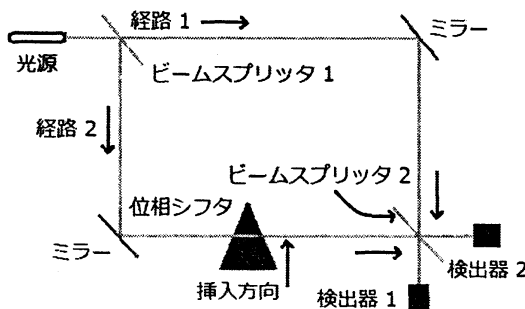


図 2: 設定 I (干渉)

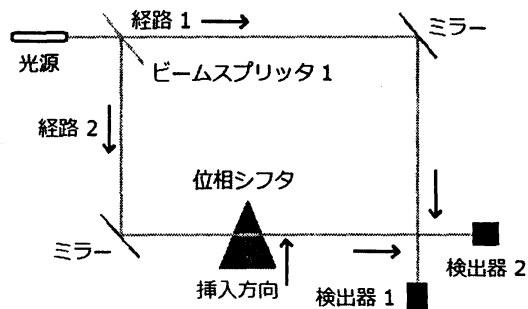


図 3: 設定 D (識別)

定量的に扱うため、2つの経路を2準位系として扱う。各経路に対応する射影を

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

とすると、最も簡単な経路識別量は

$$A = P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

で、これは光子の検出数の差に対応した量である。状態ベクトルは

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1) \quad (3)$$

となる。位相シフト(ゲージ変換)は  $G_\theta = P_1 + e^{i\theta} P_2$  である。このとき、経路識別量の期待値は

$$\langle \psi | G_\theta^* A G_\theta | \psi \rangle = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 \quad (4)$$

である。一方、ビームスプリッタを挿入した設定Iでは、ビームスプリッタはユニタリな作用  $U$  を与えるので、検出器での物理量は  $A$  から  $U^* A U$  へと変わる。ただし

$$U = e^{i\delta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & -\bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \delta \in \mathbb{R}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1) \quad (5)$$

の表示を用い、 $\alpha, \beta$  はともに0でないものとする。

$$U^* A U = (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\bar{\alpha}\beta \\ 2\alpha\bar{\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

と変形される。右辺第一項はビームスプリッタのみに依存した定数がかかった  $A$  であり、右辺第二項がビームスプリッタにより受けた本質的な物理量の変化である。この項は位相シフトにより

$$G_\theta^* \begin{pmatrix} 0 & 2\bar{\alpha}\beta \\ 2\alpha\bar{\beta} & 0 \end{pmatrix} G_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 2e^{i\theta}\bar{\alpha}\beta \\ 2e^{-i\theta}\alpha\bar{\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

となるので位相シフトの影響はこの項が受けているとわかる。したがって、位相シフトの自由度を利用することで干渉の物理量は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる。これを  $B$  と置こう。このとき干渉量の期待値は

$$\langle \psi | G_\theta^* B G_\theta | \psi \rangle = \psi_1^* \psi_2 e^{i\theta} + \psi_1 \psi_2^* e^{-i\theta} \quad (9)$$

であり、確かに位相シフトで変動する。

以上から、

$$\text{識別の物理量 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z, \quad (10)$$

$$\text{干渉の物理量 } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x \quad (11)$$

であり、これらは非可換  $AB \neq BA$  である。更にいえば任意の状態  $\rho \in S(\mathbb{C}^2)$  ( $\mathbb{C}^2$  上の密度作用素) で非可換

$$E^A(\Delta)E^B(\Gamma)\rho \neq E^B(\Gamma)E^A(\Delta)\rho \quad (12)$$

であるので、次の定理 [11] から、 $A$  と  $B$  は任意の状態  $\rho$  で結合確率分布を持つことはない。

**定理 1.** Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の物理量  $X, Y$  と状態  $\rho \in S(\mathcal{H})$  ( $\mathcal{H}$  上の密度作用素) に対し次は同値である。ただし  $C_{X,Y}$  は閉部分空間  $\text{com}(X, Y) = \{\psi \in \mathcal{H} | [E^A(\Delta), E^B(\Gamma)]\psi = 0, \Delta, \Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$  上への射影作用素であり、 $P, Q$  を射影作用素とするとき  $P \wedge Q$  は  $\text{ran}(P) \cap \text{ran}(Q)$  上への射影作用素を意味する。

(1)  $C_{X,Y}\rho = \rho$

(2) 次を満たす  $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2))$  上のスペクトル測度  $E$  が存在。

$$E(\Delta \times \Gamma)\rho = E^X(\Delta) \wedge E^Y(\Gamma)\rho \quad \text{for all } \Delta, \Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \quad (13)$$

(3)  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  上の関数  $\Delta \times \Gamma \mapsto \text{Tr}[E^X(\Delta) \wedge E^Y(\Gamma)\rho]$  は  $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2))$  上の確率測度に拡張される。

(4)  $E^X(\Delta)E^Y(\Gamma)\rho = E^Y(\Gamma)E^X(\Delta)\rho \quad \text{for all } \Delta, \Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

干渉の物理量と識別の物理量は結合確率分布を持つことはないという結果と、実験設定では設定 D と設定 I が互いに排他的であることと無関係ではなく、(測定データの解析を含む) 同一の実験設定では検証できない。

ここまでの解析だけからは導き出せないが先回りして言うと、前に同定した識別量と干渉量に相互関係がある。

1. 識別量は干渉量に位相シフト (ゲージ変換) として作用する。

$$e^{i\frac{\theta}{2}A} B e^{-i\frac{\theta}{2}A} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x \cos \theta - \sigma_y \sin \theta \quad (14)$$

ゲージ変換は2つの経路の位相差を作り、干渉量の値を変える。

2. 干渉量は識別量に Weyl 変換として作用し、

$$e^{i\frac{\pi}{2}B} A e^{-i\frac{\pi}{2}B} = -A \quad (15)$$

それによって2つの径路を入れ換える。

これら相互関係の意味については multi-channel 系で提示する。

## 4 Multi-channel 系

### 4.1 定式化

2-channel 系の自然な拡張として multi-channel 系を扱う。すぐに了解されることとして、multi-channel 系に移行しても実験設定の変更で識別実験と干渉実験の切り替えが可能であることが引き継がれるべき事項である。そして、一変することは識別するものが2から  $n$  へと増え、干渉の様相がより複雑となることである。これらの感覚的な理解は容易であるが、定量的な検証が可能であるためには系を特徴付ける物理量全体の構造理解が不可欠になる。このことは2-channel 系では物理量全体のなす構造が自明であったためあまり意識されなかったことである。それゆえ系の構造に合った物理量代数を探し出し、その代数構造の解析を最初の目標とする。ここで用いられる Lie 代数、特にルート系理論、については [12] を参考にすると良い。では具体的に見ていこう。

**Step 1.**  $n$  を channel 数とすると、すべての channel が識別されるには、各 channel  $i$  に射影作用素  $P_i$  が対応して、完全系

$$\sum_{i=1}^n P_i = I \quad (16)$$

をなす。また、channel  $j$  から channel  $i$  への遷移を表す作用素を  $I_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ):

$$I_{ji} = I_{ij}^*, \quad I_{ii} = P_i, \quad I_{ij} I_{kl} = \delta_{jk} I_{il} \quad (17)$$

とする。

**Step 2.** 前段階で現れた量をすべてあわせたものにより「スペクトル (射影) に基づく物理量代数」

$$S(\mathfrak{g}) = \left\{ \sum_i a_i P_i + \sum_{i,j} b_{ij} I_{ij} \mid a_i, b_{ij} \in \mathbb{C} \right\} \quad (18)$$

が構成される。これに自然に Lie 代数の構造が入るので、Lie 代数としても扱う。

**Step 3.**  $S(\mathfrak{g})$  のうち、識別に関わる部分を取り出すと

$$\left\{ \sum_i a_i P_i \mid a_i \in \mathbb{C} \right\} \quad (19)$$



である。特に、物理量であって識別の機能を果たすには

$$\left\{ \sum_i a_i P_i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\} \quad (20)$$

の形でなければならない。これは物理量の値としての識別への移行をすることになり、勝手な  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  を定めることは出来ないことに気付く。ゆえに  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  の定め方に関する認識を深めなければならない。

**Step 4.** 前段階での議論から  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  の定め方に関する規則を定めればよいとわかるが、どのようにすべきであろうか？例として次のような  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$  の組を考える。

$$\begin{aligned} A_1 &= P_1 - P_2, \\ &\vdots \\ A_i &= P_i - P_{i+1}, \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= P_{n-1} - P_n \end{aligned}$$

この  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$  は一次独立な組であり、各  $A_i$  は channel  $i$  と channel  $i+1$  を識別する。この組の元の実線型結合から作られる 0 でない全ての元は各  $P_i$  の 0 でない係数が全て一致することはない。故に、この組  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$  から生成される元ならば必ず用途に応じた識別の物理量となる。まとめると  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$  から生成される Lie 代数  $\mathfrak{h}$  は  $S(\mathfrak{g})$  の実係数可換部分 Lie 代数である。

**Step 5.** 一段階前で行った観察の解釈を考えるため、まず数学的構造を明らかにしよう。識別の物理量の全体は  $\tilde{\mathfrak{h}} = \{\sum_i a_i A_i \mid a_i \in \mathbb{R}\}$  であった。これの複素化  $\mathfrak{h} := \tilde{\mathfrak{h}}^{\mathbb{C}} = \{\sum_i a_i A_i \mid a_i \in \mathbb{C}\}$  が  $S(\mathfrak{g})$  に含まれているので、 $\mathfrak{h}$  を含み且つ全ての遷移に関する元  $\{I_{ij}\}$  - 物理量としては干渉量  $\{\sum_{i < j} (b_{ij} I_{ij} + b_{ij}^* I_{ji}) \mid b_{ij} \in \mathbb{C}\}$  - を含むような  $S(\mathfrak{g})$  の部分 Lie 代数が系の記述のため要請される。故に物理量代数  $\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$  を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \left\{ \sum_i a_i A_i + \sum_{i,j} b_{ij} I_{ij} \mid a_i, b_{ij} \in \mathbb{C} \right\} \quad (21)$$

と定めると、 $\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$  は  $S(\mathfrak{g})$  の部分 Lie 代数をなし  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$  の極大可換部分 Lie 代数となる。以後、 $\mathfrak{h}$  を明示する必要がないとき  $\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$  を  $\mathfrak{g}$  と表す。代数的閉体上の有限次元半単純 Lie 代数の理論において極大可換部分 Lie 代数は Cartan 部分代数であるから、ルート空間分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha} \right) \quad (22)$$

を行うことができ、各  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  に対し唯ひとつ  $I_{ij} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  であり  $I_{ji} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  が成り立つ。したがってこれらの構造-Cartan 部分代数とルート空間-に基づく **Step 4.** での観察の解釈は次のようになる。 $\tilde{\mathfrak{h}} = \{\sum_i a_i A_i \mid a_i \in \mathbb{R}\}$  は全ての channel を最大限識別する物理量代数であり、極大可換部分 Lie 代数をなす。 $\tilde{\mathfrak{h}}$  の複素化  $\mathfrak{h}$  は  $\tilde{\mathfrak{h}}$  を含む係数体が複素数である識別量代数で最小のものであるから、これを含むように Lie 代数を定める。このとき定められたのが  $\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$  であり、識別を最大に行うことが可能な物理量代数で、同時に干渉の物理量がルート空間分解により各ルート空間の元に分解される。

識別量全体の構造がわかっているならば干渉量は一意に意味づけられる。これは半単純 Lie 代数のルート空間分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right) \quad (23)$$

によると明白である。ルート空間分解は Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}$  を指定するたびに、それに双対なルート系  $\Phi$  が定まり干渉量はルート空間  $\mathfrak{g}_\alpha$  の成分ごとに分解される。特に各  $\mathfrak{g}_\alpha$  は 1 次元であるから各成分への分解は一意である。 $\langle A, B \rangle := \text{Tr}[\text{ad}(A)\text{ad}(B)]$  ( $A, B \in \mathfrak{h}$ ) と定め、 $X_\alpha$  を任意の  $A \in \mathfrak{h}$  に対し  $\alpha(A) = \langle A, X_\alpha \rangle$  となる  $\mathfrak{h}$  の元とする。

1.  $A \in \mathfrak{h}, B = I_\alpha + I_{-\alpha}$  ( $I_{-\alpha} = I_\alpha^*, [I_\alpha, I_{-\alpha}] = X_\alpha$ ) のとき

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\text{ad}(B)\right)A = e^{i\frac{\pi}{2}B}Ae^{-i\frac{\pi}{2}B} = s_\alpha(A) := A - 2\frac{\langle A, X_\alpha \rangle}{\langle X_\alpha, X_\alpha \rangle}X_\alpha \quad (24)$$

干渉量は識別量に Weyl 変換の “generator” として作用する。これは channel の置換を行ったときの物理量の値の変化に対応するので、正しく測定器が動作することを確認する較正過程である。

2.  $A \in \mathfrak{h}, B \in \mathfrak{g}_\alpha$

$$\exp(i\theta \text{ad}(A))B = e^{iA\theta}Be^{-iA\theta} = e^{i\alpha(A)\theta}B \quad (25)$$

識別量は干渉量にゲージ変換の generator として作用する。すなわち、識別量はゲージ変換のチャージの意味を持ち、各識別量は実験におけるゲージ変換の操作と対応する。このとき任意の干渉量  $B$  はチャージ (識別量)  $Q$  が引き起こすゲージ変換にしたがって Fourier 分解される。

$$e^{iQ\theta}Be^{-iQ\theta} = \sum_{\alpha \in \Phi} e^{i\alpha(Q)\theta}c_\alpha I_\alpha \quad (26)$$

ただし  $B$  の自己共役性から  $c_\alpha = c_{-\alpha}^*, I_\alpha = I_{-\alpha}^*$  を満たす  $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \Phi}, \{I_\alpha\}_{\alpha \in \Phi}$  の分解とする。

## 4.2 具体的表示

具体的な表示を扱うために  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n)^{\mathbb{C}}$  とする、 $P_i$  を  $(i, i)$  成分のみ 1 で他の成分が 0 の行列、 $I_{ij}$  を  $(i, j)$  成分のみ 1 で他の成分が 0 の行列 ( $I_{ii} = P_i$ ) とする ( $i, j = 1, \dots, n$ )。そして  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$  を

$$A_i = \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}} \left\{ \sum_{j=1}^i P_j - iP_{i+1} \right\} \quad (27)$$

で定める ( $i = 1, \dots, n$ )。Cartan 部分代数  $\mathfrak{g}$  としてこの  $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$  は線型結合の元とする。そして基本ルート  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$  を次で定める。

$$\alpha_1 = (\sqrt{2}, 0, \dots, 0), \quad (28)$$

$$\alpha_i = \left( 0, \dots, -\sqrt{\frac{i-1}{i}}, \sqrt{\frac{i+1}{i}}, \dots, 0 \right) \quad (29)$$

( $i = 2, \dots, n-1$ )。ただし  $\alpha_i (i = 2, \dots, n-1)$  の第  $i-1$  成分が  $-\sqrt{i-1/i}$ 、第  $i$  成分が  $\sqrt{i+1/i}$  である。この基本ルートは  $\mathbb{R}^n$  の第  $i$  成分が 1 で他の成分が 0 の元と

$$e_i \left( \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix} \right) = a_{ii} \quad (30)$$

を満たす対角行列から実数への線型写像  $e_i (i = 1, \dots, n)$  を同一視し、 $\{e_1, \dots, e_n\}$  の線型結合からなる線型空間  $\sum \mathbb{R}e_i$  の部分空間としてルート系を扱うことで意味を持つことに注意する。このとき  $I_{i,i+1} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} (i = 1, \dots, n-1)$  であり、

$$I_{ij} \in \mathfrak{g}_{\sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k} (i < j), \quad I_{ij} \in \mathfrak{g}_{-\sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k} (i > j) \quad (31)$$

となりルート空間の構造が定まる。

例 6. ( $\mathcal{B}$ -channel 系)

・  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(3)^{\mathbb{C}}$

・ Cartan 部分代数  $\mathfrak{h}$ :  $\mathcal{B}$ -channel 系を識別するのに必要十分な物理量を含む代数

$$\mathfrak{h} := \{a_1 A_1 + a_2 A_2\}, \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (32)$$

・ ルート空間 = 随伴表現の同時固有値 = チャージ

$$I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$[A_1, I_{12}] = \sqrt{2} I_{12}, \quad [A_2, I_{12}] = 0 \Rightarrow I_{12} \in \mathfrak{g}_{\alpha_1}, \quad (34)$$

$$[A_1, I_{23}] = -\frac{1}{\sqrt{2}} I_{23}, \quad [A_2, I_{23}] = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} I_{23} \Rightarrow I_{23} \in \mathfrak{g}_{\alpha_2}, \quad (35)$$

$$[A_1, I_{13}] = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{13}, \quad [A_2, I_{13}] = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} I_{13} \Rightarrow I_{13} \in \mathfrak{g}_{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (36)$$

ただし  $\alpha_1 = (\sqrt{2}, 0)$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, \sqrt{3})$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \sqrt{3})$  である。

・ 較正過程 (Weyl 変換)  $B_{12} = I_{12} + I_{21}$  とおくと、

$$e^{i\frac{\pi}{2} B_{12}} A_1 e^{-i\frac{\pi}{2} B_{12}} = -A_1, \quad (37)$$

$$e^{i\frac{\pi}{2} B_{12}} A_2 e^{-i\frac{\pi}{2} B_{12}} = A_2 \quad (38)$$

・ 干渉量: ルート空間の元から構成される  $\mathcal{B}$ -channel 間の遷移に対応する物理量

$$B_{\alpha_1} = a_{12} I_{12} + a_{12}^* I_{21} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$B_{\alpha_2} = a_{23} I_{23} + a_{23}^* I_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{23}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$B_{\alpha_1 + \alpha_2} = a_{13} I_{13} + a_{13}^* I_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{13}^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

ゲージ変換は、例えば  $e^{iA\theta} B_{\alpha_1} e^{-iA\theta} = e^{\alpha_1(A)} a_{12} I_{12} + e^{-\alpha_1(A)} a_{12}^* I_{21}$  となる。

## 5 相補性原理

既に提示した双対性と前章で議論した multi-channel 系という重要な例を念頭において相補性の概念を捉え直すならば、それは、「存在論的な双対性」に基づいた「認識論的な双対性」を有する二側面の関係として捉えられるだろう。もっと碎いて言えば、ひとつの側面を見ない(ための)条件によってもうひとつの側面が見えるようになり、ひとつの側面を見る(ための)条件によってもうひとつの側面が見えなくなる、というタイプの双対性を有する二側面は相補的であると言われる。ものの本性(自然)を捉えるには相補的な二側面の認識が不可欠である、というのが相補性の原理である。これを標語的にまとめると次のようになる。

**相補性原理 2.** (標語版) 対象記述に不可欠な内的に双対的な二側面は、相互に依存する関係で結ばれながら、その各々を明瞭に可視化する条件・過程が両立不可能なとき、相補的であるという。相補的概念を基礎にした認識の視点・方法を相補性原理と呼ぶ。

物理の文脈に照らし合わせる。状態と物理量の双対性によって初めて、物理量の「位置と運動量」や「干渉と識別」の間の相補性に関する議論が可能となる。位置と運動量は Fourier 双対の関係にあり、干渉の物理量と識別の物理量はルート系を介した Cartan-root space 双対の関係にある。この「位置と運動量」や「干渉と識別」の間の双対性は、ともに物理量の概念に属し対象記述どちらも不可欠であるが、一方を測定する条件が一方を測定する条件を満たさない性格のものである。このような認識法は先に言及した相補性そのものである。

実生活で相補性に直接的な形で遭遇することは少ないかもしれないが、ネッカーキューブ(図4)などの図地反転図形は可視化に関する非両立性を見事な例を与えていて、とても身近に存在する事象のもつ性質であるとわかる。一方の見方が図なら他方は地となり、同時に両方が実現することはない。

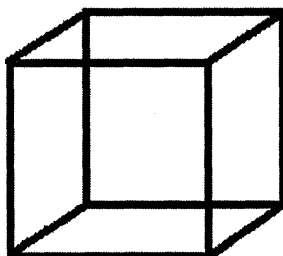


図 4: ネッカーキューブ

## 6 結論・展望

本稿では multi-channel 系の特徴付けを行い、識別の物理量と干渉の物理量はルート系を介した双対関係にあることを示した。今後はダブルスリット実験での「位置と運動量」のような連続スペクトルをもつ物理量への拡張および測定過程を取り込んだ定式化が目標となる。更には根源・立脚点をより正確に把握する意味を込めて、場の量子論への拡張を場の量子論における測定過程の定式化 [13] に基づき実行する必要があるだろう。そして、双対性に基づき相補性原理の定式化を行ったが、これらの目標は相補性原理の更なる定量的表現を求めることに直結している。

## 参考文献

- [1] 山本 義隆 編訳, ニールス・ボーア論文集 1, 「因果性と相補性」, 岩波書店 (1999).
- [2] マックス・ヤンマー 著, 井上 健 訳, 量子力学の哲学 (上), 紀伊國屋書店 (1983).
- [3] W. K. Wootters and W. H. Zurek, Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of Bohr's principle, *Phys. Rev. D* **19**, 473-484 (1979).
- [4] P. Storey, S. Tan, M. Collett, and D. Walls, Path detection and the uncertainty principle, *Nature* **367**, 626-628 (1994).
- [5] M. O. Scully and H. Walther, Quantum optical test of observation and complementarity in quantum mechanics, *Phys. Rev. A* **39**, 5229-5236 (1989); M. O. Scully, B.-G. Englert, and H. Walther, Quantum optical tests of complementarity, *Nature* **351**, 111-116 (1991).
- [6] B.-G. Englert, M. O. Scully, and H. Walther, Complementarity and uncertainty, *Nature* **375**, 367-368 (1995); E. P. Storey, S. M. Tan, M. J. Collett, and D. F. Walls, Complementarity and uncertainty, *Nature* **375**, 368 (1995); H. Wiseman and F. Harrison, Uncertainty over complementarity?, *Nature* **377**, 584 (1995).
- [7] Y. Aharonov, D.Z. Albert, and L. Vaidman, How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100, *Phys. Rev. Lett.* **60** 1351-1354 (1988); Y. Shikano and A. Hosoya, Weak values with decoherence, *J. Phys. A: Math. Gen.* **43** 025304 (2010); A. Hosoya and Y. Shikano, Strange weak values, (2010) arXiv:1006.1615; T. Sagawa, Weak value and correlation function, (2009) arXiv:0901.4212.
- [8] I. Ojima, "Micro-Macro Duality in Quantum Physics", pp.143-161 in *Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum* (World Scientific, 2005), arXiv:math-ph/0502038; 小嶋 泉, だれが量子場を見たか, 「だれが量子場を見たか」 (日本評論社, 2004) pp.65-107; I. Ojima and M. Takeori, How to observe and recover quantum fields from observational data? -Takesaki duality as a Micro-Macro duality-, *Open Sys. Information Dyn.* **14**, 307-318 (2007); R. Harada and I. Ojima, A unified scheme of measurement and amplification processes based on Micro-Macro Duality ? Stern-Gerlach experiment as a typical example ?, *Open Sys. Information Dyn.* **16**, 55-74 (2009); 小嶋 泉, 谷村 省吾, 双対性をめぐる物理学対話 -量子と古典, ミクロとマクロ-, 別冊・数理科学「特集: 双対性の世界」 (サイエンス社, 2007) pp.34-44.
- [9] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, (Springer-Verlag, 1971).
- [10] A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, and T. Kawasaki, Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern, *Am. J. Phys.* **57**, 117-120 (1989).
- [11] S. Gudder, Joint distributions of observables, *J. Math. Mech.* **18**, 325 (1968); K. Ylisen, On a theorem of Gudder on joint distributions of observables, in: P. Lahti, P. Mittelstaedt(Eds.), *Symposium on the Foundations of Modern Physics*, World Scientific, Singapore, 1985, pp.691-694; M. Ozawa, Quantum perfect correlations, *Ann. Phys. (N.Y.)* **321**, 744 (2006); M. Ozawa, Simultaneous measurability of non-commuting observables and the universal uncertainty principle, in: *Proc. 8th Int. Conf. on Quantum Communication, Measurement and Computing*, O. Hirota and J. Shapiro and M. Sasaki(Eds.), NICT Press, Tokyo, 363-368 (2007).

- [12] 松島 与三, リー環論, (共立出版, 1953); 東郷 重明, リー代数, (槇書店, 1983); 谷崎 俊之, リー代数と量子群, (共立出版, 2002); 大島 利雄, 小林 俊行, リー群と表現論, (岩波書店, 2005).
- [13] I. Ojima, Roles of asymptotic conditions and S-matrix as Micro-Macro Duality in QFT, Quantum Probability and WNA **26**, 277-290 (2010).